

2.找规律、程序运算和定义新运算

一、找规律

1. 等差数列

思考：观察下列数的特征、写出下列数列的第6项

① 2, 4, 6, 8, 10, 12,, _____,

② 1, 3, 5, 7, 9, 11,, _____,

③ 1, 5, 9, 13, 17, 21,, _____,

你能在后面的横线上写出每个数列的第n项吗？

【备注】1. 上面数列①第n项是 $2n$ ，数列②第n项是 $2n-1$ ，数列③第n项是 $4n-3$ 。

2. 这里数列①的第n项很好写、

数列②的每一项可以用数列①每一项减1得到、因此可得数列②第n项；

这里先稍作停顿、让学生先观察数列①②并说说式子里前面的倍数（系数）与后项前项差的关系（答：相等），

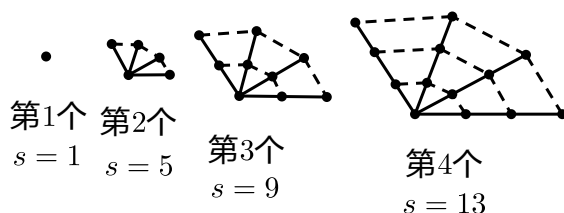
由此推数列③第n项中的倍数是4、再用第1项的数1来“修正”这个式子：要想相等就要让 4×1 减去3、从而得到数列③的第n项。以上思路可用下面口诀进行强调记忆：

【口诀】公差（后项前项的差数）是几，先写几n，然后用第一个数去检验。

你能在后面的横线上写出每个数列的第n项吗？

栗子1

1. 观察图中给出的四个点阵， s 表示每个点阵中的点的个数，按照图形中的点的个数变化规律，猜想第 n 个点阵中的点的个数 s 为（ ）。



A. $3n - 2$

B. $3n - 1$

C. $4n + 1$

D. $4n - 3$

【答案】D

【解析】由上图可以看出4个点的个数分别为：1、5、9、13，

且 $5 - 1 = 4$ 、 $9 - 5 = 4$ 、 $13 - 9 = 4$ ，

所以上述几个点阵中点的个数呈现的规律为：每一项都比前一项多4，

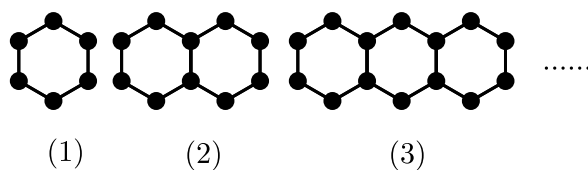
即：第 n 个点阵中点的个数为：

$$1 + 4(n - 1) = 4n - 3.$$

【标注】【知识点】数列找规律-图形类的等差数列

栗子2

2. 用火柴棒按如图所示的方式摆图形，按这样的规律继续摆下去，第 n 个图形需要根火柴棒 _____。（用含 n 的代数式表示）



【答案】 $5n + 1$

【解析】由图可知：

图形标号（1）的火柴棒根数为6；

图形标号（2）的火柴棒根数为11；

图形标号（3）的火柴棒根数为16；

...

由该搭建方式可得出规律：图形标号每增加1，火柴棒的个数增加5，

所以可以得出规律：搭第 n 个图形需要火柴根数为： $6 + 5(n - 1) = 5n + 1$ 。

【标注】【知识点】数列找规律-图形类的等差数列

2. 等比数列

思考：观察下列数的特征、写出下列数列的第 n 项（用幂的形式表示）

① 3, 9, 27, 81, 243,, _____,

② 2, 4, 8, 16, 32,, _____,

③ 1, 2, 4, 8, 16,, _____,

【备注】 1. 上面数列①第 n 项是 3^n ，数列②第 n 项是 2^n ，数列③第 n 项是 2^{n-1} 。
 2. 这里数列①②的第 n 项很好写、数列③的每一项的指数可以用数列①每一项指数减1得到、因此可得数列③第 n 项。
 3. 这里要先让学生观察这些数列（仿照前面等差数列的观察）、说出后项和前项的区别和联系：后一个数总是前一个数的2倍或3倍。以上思路可用下面口诀进行强调记忆：
【口诀】 公比（后项前项的倍数）是几，先写几的 n 次方，然后用第一个数去检验。

栗子3

3. 观察下面两行数的特征：则第二行第 n 个数可表示为 _____。

$-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

$-1, 2, -4, 8, -16, 32, \dots$

【答案】 $\frac{1}{2} \cdot (-2)^n$

【解析】 观察发现第一行第 n 个数可以表示为 $(-2)^n$ ，

第二行的数是第一行的一半，

$\therefore$ 第二行第 n 个数可表示为 $\frac{1}{2} \cdot (-2)^n$ 。

故答案为： $\frac{1}{2} \cdot (-2)^n$ 。

【标注】 【知识点】 数列找规律

栗子4

4. 某种细胞开始有2个，1小时后分裂成4个并死去1个，2小时后分裂成6个并死去1个，3小时后分裂成10个并死去1个，...，按此规律，5小时后细胞存活的个数是（ ）。

A. 31

B. 33

C. 35

D. 37

【答案】 B

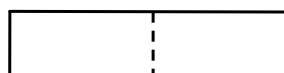
【解析】 $2^5 + 1 = 33$ 个。

【标注】 【知识点】 有理数乘法与实际问题

栗子5

5. 如图所示，将一张长方形纸对折，可得到1条折痕（图中虚线），继续对折，对折时每次折痕与上一次的折痕保持平行，连续对折三次后，可以得到7条折痕，那么如果对折四次，可以得到 _____ 条

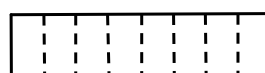
折痕，对折 n 次，可以得到 _____ 条折痕．



第一次对折



第二次对折



第三次对折

【答案】 $15; 2^n - 1$

【解析】 由图可知，第1次对折，把纸分成2部分，1条折痕，
第2次对折，把纸分成4部分，3条折痕，
第3次对折，把纸分成8部分，7条折痕，
所以，第4次对折，把纸分成16部分，15条折痕，
...
依次类推，第 n 次对折，把纸分成 2^n 部分， $2^n - 1$ 条折痕．

【标注】 【知识点】 数列找规律-图形类的等比数列

3. 平方数列及衍生

思考：观察下列数的特征、写出下列数列的第 n 项

- ① 1, 4, 9, 16, 25....., _____,
- ② 2, 5, 10, 17, 26,, _____,
- ③ 0, 3, 8, 15, 24,, _____,

【备注】 对平方数列的观察判断需要学生对整数平方有深刻记忆，在此请教师向学生强调记忆背诵1~20平方数的重要性．

栗子6

6. 观察下面一组单项式中的前四个单项式： $x, -x^4, x^9, -x^{16} \dots\dots$ ，则第 n 个单项式是 _____ ．

【答案】 $(-1)^{n+1} \cdot x^{n^2}$

【解析】 $\because x = (-1)^{1+1} \cdot x^1,$
 $-x^4 = (-1)^{2+1} \cdot x^{2^2},$
 $x^9 = (-1)^{3+1} \cdot x^{3^2},$
 $-x^{16} = (-1)^{4+1} \cdot x^{4^2},$

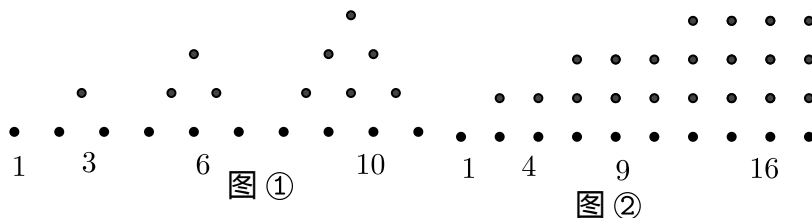
故第 n 个单项式为 $(-1)^{n+1} \cdot x^{n^2}$,

故答案为: $(-1)^{n+1} \cdot x^{n^2}$.

【标注】【知识点】算式找规律

栗子7

7. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形态来研究数, 比如, 他们研究过图①中的1, 3, 6, 10, ... 由于这些数能够表示成三角形, 故将其称为三角形数, 类似的, 称图②中的1, 4, 9, 16, ... 这样的数为正方形数, 下列数中, 既是三角形数, 又是正方形数的是 ().



A. 289

B. 1024

C. 1225

D. 1378

【答案】C

【解析】35的平方是1225.

$$50 \times \frac{51}{2} = 1225.$$

【标注】【知识点】数列找规律-三角形数及衍生数列

【知识点】数列找规律-平方数及衍生数列

【能力】运算能力

【能力】抽象概括能力

4. 三角数列及衍生

思考: 观察下列数的特征、写出下列数列的第 n 项

① 2, 6, 12, 20, 30, 42,, _____,

② 1, 3, 6, 10, 15, 21,, _____,

【备注】1. 三角数列的观察比较难、不具有前面数列的明显特征, 建议教师展示出分析过程:

对数列①将每一项的数字做因数分解:

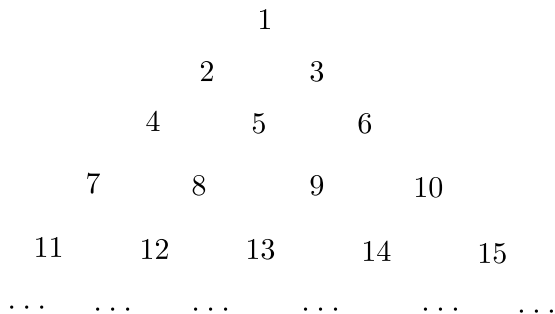
$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6, 6 \times 7 \cdots;$$

由此可得数列①的第 n 项—— $n^2 + n$.

2. 当然此处可以再展示平方数列：1, 4, 9, 16, 25...，让学生和数列①进行比较、从而可以得到数列①的第n项—— $n^2 + n$ ；再将数列①和数列②进行比较、可以得到数列②的第n项—— $\frac{n^2 + n}{2}$ 。

栗子8

8. 如图，将全体正整数排成一个三角形数阵，按这样的规律，第8行第3个数是_____。



【答案】 31

【解析】 每一行的最后一个数满足三角形数列。

【标注】 【知识点】 数列找规律-三角形数及衍生数列

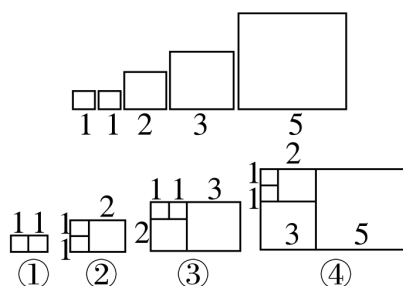
【能力】 抽象概括能力

5. 斐波那契数列（兔子数列）

独步天下

9. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一组数：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...，现以这组数中的各个数作为正方形的长度构造正方形，再分别依次从左到右取2个, 3个, 4个, 5个正方形拼成如下矩形并标记为①、②、③、④，相应矩形的周长如下表所示：

序号	①	②	③	④
周长	6	10	16	26



若按此规律继续作矩形，则序号为⑩的矩形周长是_____。

【答案】 466

【解析】 结合图形可得：

①中矩形的周长为 $2(1+2)$ ，

②中矩形的周长为 $2(2+3)$ ，

③中矩形的周长为 $2(3+5)$ ，

④中矩形的周长为 $2(5+8)$ ，

由此可得，第 n 个长方形的宽为第 $n-1$ 个长方形的长，第 n 个长方形的长为第 $n-1$ 个长方形长和宽的和。

故⑤中矩形的周长为 $2(8+13)$ ，

⑥中矩形的周长为 $2(13+21)$ ，

⑦中矩形的周长为 $2(21+34)$ ，

⑧中矩形的周长为 $2(34+55)$ ，

⑨中矩形的周长为 $2(55+89)$ ，

⑩中矩形的周长为 $2(89+144) = 466$ 。

【标注】 【知识点】 数列找规律-斐波那契数列（兔子数列）

6. 复合数列

【与负号复合】

思考：观察下列数的特征、写出下列数列的第 n 项

① $-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots, \underline{\hspace{1cm}}, \dots$

② $+1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots, \underline{\hspace{1cm}}, \dots$

【分数形式的复合】 分子分母分别找规律。

【备注】 由乘方的知识知数列①第 n 项可以写成 $(-1)^n$ ，
数列②第 n 项可以写成 $(-1)^{n-1}$ （或 $(-1)^{n+1}$ ）。

栗子9

10. 有一组数， $-\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, -\frac{3}{35}, \frac{4}{63}, -\frac{5}{99}, \dots$ 。请观察这组数的构成规律，用你发现的规律确定第6个数是 ；第 n 个数是 。

【答案】 $\frac{6}{143}; (-1)^n \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

【解析】 第1个数是 $-\frac{1}{1 \times 3} = -\frac{1}{3}$,
 第2个数是 $\frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$,
 第3个数是 $-\frac{3}{5 \times 7} = -\frac{3}{35}$,

 第6个数是 $\frac{6}{11 \times 13} = \frac{6}{143}$
 第n个数是 $(-1)^n \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$.

【标注】【知识点】数列找规律-其他数列规律

栗子10

11. 观察下列各式数： $-2x, 4x^2, -8x^3, 16x^4, -32x^5, \dots$ 则第n个式子是 () .

- A. $-2^{n-1}x^n$ B. $(-2)^{n-1}x^n$ C. $-2^n x^n$ D. $(-2)^n x^n$

【答案】 D

【解析】 第1个式子： $-2x = (-2)^1 x^1$
 第2个式子： $4x^2 = (-2)^2 x^2$
 第3个式子： $-8x^3 = (-2)^3 x^3$
 第4个式子： $16x^4 = (-2)^4 x^4$
 综上，第n个式子： $(-2)^n x^n$.

【标注】【知识点】代数式找规律

7. 循环数列

思考：观察下列数的特征、写出下列数列的第n项

① $-1, 0, +1, -1, 0, +1, \dots, \underline{\hspace{1cm}}, \dots$

② $6, 4, 3, 1, 6, 4, 3, 1, \dots, \underline{\hspace{1cm}}, \dots$

【备注】 引导学生观察数列中的循环节是什么、循环节中有多少个数、最后确定第n项在一个循环节中的位置（类比无限循环小数来理解、最后项数在循环节的位置也就是除以循环节数字个数的余数）；

此处可以提问学生使其掌握，比如：

问：数列①的第100个数是多少？如何计算？

答：由于数列①三个数为一节（一周期），而 $100 \div 3 = 33 \cdots 1$ ，
所以第100个数就是第1个数、即-1。

问：数列②的第75个数是多少？如何计算？

答：由于数列②四个数为一节（一周期），而 $75 \div 4 = 18 \cdots 3$ ，
所以第75个数就是第3个数、即3。

周期数列

对于数列 a_n ，若存在一个（固定的）正整数 k ，使得对一切正整数 n 都有 $a_{n+k} = a_n$ 成立，
则称数列为从第1项起的周期为 k 的周期数列。

$n \div \text{周期} = \text{组数} \cdots \text{余数}$

余数为0，则为一组循环中 最后一个；

余数为1，则为一组循环中的第 一 个；

余数为2，则为一组循环中的第 二 个；

.....

余数小于周期数，余数为 k ， k 小于周期，则为一组循环中的第 k 个。

【注意】

①在进行计算时，不可将被除数与除数进行约分，否则会改变余数。

②算完之后，一定要验算。

栗子11

12. 有若干个数，第1个数记作 a_1 ，第2个数记为 a_2 ，第3个数记为 a_3 ，.....，第 n 个数记为 a_n ，若 $a_1 = -\frac{1}{2}$ ，从第2个数起，每个数都等于1与前面的那个数的差的倒数，则 $a_{2018} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $a_1 = -\frac{1}{2}$ ，
 $a_2 = \frac{1}{1 - a_1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$ ，
 $a_3 = \frac{1}{1 - a_2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$ ，
 $a_4 = \frac{1}{1 - a_3} = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$ ，
.
.

$$\therefore a_{2018} = a_2 = \frac{2}{3} .$$

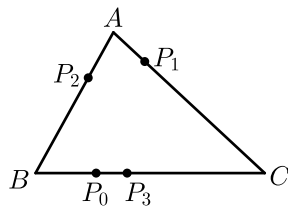
故填： $\frac{2}{3}$.

【标注】【知识点】数列找规律-其他数列规律

【能力】运算能力

栗子12

13. 电子跳蚤游戏盘为如图三角形 ABC ， $AB = 8$ ， $AC = 9$ ， $BC = 10$ ，如果电子跳蚤开始时在 BC 边上 P_0 点， $BP_0 = 4$ ，第一步跳蚤跳到 AC 边上 P_1 点，且 $CP_1 = CP_0$ ；第二步跳蚤从 P_1 跳到 AB 边上 P_2 点，且 $AP_2 = AP_1$ ；第三步跳蚤从 P_2 跳回到 BC 边上 P_3 点，且 $BP_3 = BP_2$...，跳蚤按上述规定跳下去，第2019次落点为 P_{2019} ，则点 P_{2019} 与点 B 之间的距离为（ ）.



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】C

【解析】方法一：由题意可知，跳蚤的运动路线为

$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \cdots$ ，循环往复（其中 $CP_4 = 5$ ， $AP_5 = 4$ ），

$\therefore$ 第2019次落点 P_{2019} 与 P_3 重合，

$\therefore P_{2019}B = P_3B = 5$.

故选：C.

方法二：因为 $BP_0 = 4$ ，根据题意 $CP_0 = 10 - 4 = 6$ ，

第一步从 P_0 到 P_1 ， $CP_1 = CP_0 = 6$ ； $AP_1 = 9 - 6 = 3$ ，

第二步从 P_1 到 P_2 ， $AP_2 = AP_1 = 3$ ； $BP_2 = 8 - 3 = 5$ ，

第三步从 P_2 到 P_3 ， $BP_3 = BP_2 = 5$ ； $CP_3 = 10 - 5 = 5$ ，

第四步从 P_3 到 P_4 ， $CP_4 = CP_3 = 5$ ； $AP_4 = 9 - 5 = 4$ ，

第五步从 P_4 到 P_5 ， $AP_5 = AP_4 = 4$ ； $BP_5 = 8 - 4 = 4$ ，

第六步从 P_5 到 P_6 ， $BP_6 = BP_5 = 4$ ；

由此可知， P_6 点与 P_0 点重合，又因为 $2019 = 6 \times 336 + 3$ ，

所以 P_{2019} 点与 P_3 点重合，则点 P_{2019} 与 B 点之间的距离为 $BP_3 = 5$.

故选C .

【标注】【知识点】数列找规律-具有周期规律的数列

8. 数表问题

【备注】本类型题，对数字变化规律的考查，仔细观察图表和数列，找出变化规律.

栗子13

14. 填在下面各正方形中的四个数之间都有相同的规律，根据这种规律， m 的值应是（ ） .

0	4	2	6	4	8	10	
2	8	4	26	6	52		m

A. 110

B. 158

C. 168

D. 178

【答案】D

【解析】根据排列规律，10下面的数是12，10右面的数是14，

结合前三个图看出，右上角的数为左下角数加2，且有如下规则：

$$\therefore 8 = 2 \times 4 + 0, 26 = 4 \times 6 + 2,$$

$$52 = 6 \times 8 + 4,$$

$$\therefore m = 12 \times 14 + 10 = 178.$$

故选D .

【标注】【知识点】数列找规律-其他数列规律

【能力】运算能力

栗子14

15. 正整数按如图的规律排列．请写出第20行第21列的数字 _____ .

	第一列	第二列	第三列	第四列	第五列	
第一行	1	2 ↓	5 ↓	10 ↓	17 ↓	...
第二行	4 ←	3	6 ↓	11 ↓	18 ↓	...
第三行	9 ←	8 ←	7	12 ↓	19 ↓	...
第四行	16 ←	15 ←	14 ←	13	20 ↓	...
第五行	25 ←	24 ←	23 ←	22 ←	21	...
...						

【答案】 420

【解析】 观察可得规律：

第一行第二列的数： $2 = 1 \times 2$ ；

第二行第三列的数： $6 = 2 \times 3$ ；

第三行第四列的数： $12 = 3 \times 4$ ；

.....

第 n 行第 $n + 1$ 列的数： $n(n + 1)$

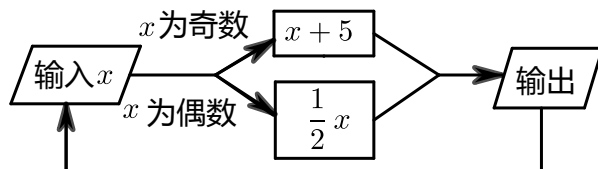
故可得第20行第21列的数为： $20 \times 21 = 420$.

【标注】 【知识点】 数列找规律-其他数列规律

二、 程序运算

栗子15

16. 如图所示的运算程序中，若开始输入的 x 值为24，则第1次输出的结果为12，第2次输出的结果为6， $\dots$ ，第2000次输出的结果为（ ）。



A. 1

B. 2

C. 4

D. 6

【备注】把 $x = 24$ 代入运算程序中，找出一一般性规律，即可得到结果.

【答案】 D

【解析】 当 $x = 24$ ， $24 \times \frac{1}{2} = 12$ ，当 $x = 8$ ， $8 \times \frac{1}{2} = 4$ ，
当 $x = 12$ ， $12 \times \frac{1}{2} = 6$ ，当 $x = 4$ ， $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ，
当 $x = 6$ ， $6 \times \frac{1}{2} = 3$ ，当 $x = 2$ ， $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ，
当 $x = 3$ ， $3 + 5 = 8$ ，当 $x = 1$ ， $1 + 5 = 6$ ，
依次类推：
 $\therefore (2000 - 1) \div 6 = 333 \cdots 1$ ，
 $\therefore$ 第2000次结果为6.
故选D.

【标注】【知识点】程序框图

三、定义新运算

定义新运算是指用一个符号和已知运算表达式表示一种新的运算.

【备注】解决此类问题，关键是要正确理解新定义的算式含义，严格按照新定义的计算顺序，将数值代入算式中，再把它转化为一般的四则运算，然后进行计算.

【注意】新定义的算式中，有括号的，要先算括号里面的.

栗子16

17. 若定义： $f(a, b) = (-a, b)$ ， $g(m, n) = (m, -n)$ ，例如 $f(1, 2) = (-1, 2)$ ， $g(-4, -5) = (-4, 5)$ ，则 $g(f(2, -3)) = (\quad)$.
- A. $(2, -3)$ B. $(-2, 3)$ C. $(2, 3)$ D. $(-2, -3)$

【答案】 B

【解析】 根据定义， $f(2, -3) = (-2, -3)$ ，
所以， $g(f(2, -3)) = g(-2, -3) = (-2, 3)$.
故选B.

【标注】【知识点】定义新运算

18. 如果规定符号 “*” 的意义是 $a * b = \frac{a \cdot b}{a + b}$, 则 $2 * (-3) * 4$ 的值是 _____ .

【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】 $2 * (-3) * 4$,
 $= \frac{2 \times (-3)}{2 + (-3)} * 4$,
 $= \frac{6 * 4}{6 + 4}$,
 $= \frac{12}{5}$.

【标注】【知识点】定义新运算

19. 定义一种运算： $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 例如 $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - (-2) \times (-3) = -6$, 那么当 $a = -1^2$, $b = -(-2)^2 - 1$, $c = -3^2 + 5$, $d = \frac{1}{4} - \left| -\frac{3}{4} \right|$, 求 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ 的值是 _____ .

【答案】 $-\frac{39}{2}$

【解析】 $\because a = -1^2 = -1$, $b = -4 - 1 = -5$, $c = -3^2 + 5 = -4$, $d = \frac{1}{4} - \left| -\frac{3}{4} \right| = -\frac{1}{2}$,
 $\therefore \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$
 $= (-1) \times \left(-\frac{1}{2} \right) - (-5) \times (-4)$
 $= \frac{1}{2} - 20$
 $= -\frac{39}{2}$.
 故答案为： $-\frac{39}{2}$.

【标注】【知识点】定义新运算